TEMA VIII.- MODULACIONES ANGULARES

VIII.1.- MODULACIONES ANGULARES

En las modulaciones angulares, la fase de la portadora varía de alguna manera de acuerdo con la señal mensaje o moduladora, manteniéndose la amplitud constante.

A diferencia de las modulaciones lineales, las modulaciones angulares no son procesos lineales, por lo que el espectro de la señal modulada no está relacionado de una manera simple con el espectro del mensaje.

Las modulaciones angulares presentan una mayor protección contra el ruido e interferencias que las modulaciones lineales. Estas mejoras son obtenidas a costa de un ancho de banda de transmisión bastante mayor que el de la señal mensaje.

VIII.2.- MODULACION DE FASE Y MODULACION DE FRECUENCIA

La señal modulada en modulaciones angulares tiene la forma

$$s(t) = A_c \cos\theta_c(t)$$

siendo A_c constante y $\theta_c(t)$ una función lineal del mensaje x(t). La pulsación y frecuencia instantánea son

$$\omega_i(t) = \frac{d\theta_c(t)}{dt} \qquad\qquad f_i(t) = \frac{\omega_i}{2\pi}$$

Aunque pueden existir diversas formas de variar la fase, en la práctica sólo se utilizan la modulación de fase (PM) y la modulación de frecuencia (FM).

Escribiendo la fase de la señal modulada como

$$\theta_c(t) = \omega_c t + \phi_c(t)$$

donde ω_c es la pulsación de la portadora y ϕ_c (t) puede ser interpretado como la fase relativa, ambas modulaciones tendrán las formas siguientes.

VIII.2.1.- MODULACION DE FASE

El término de fase relativa $\phi_c(t)$, varía proporcionalmente al mensaje, esto es

$$\theta_c(t) = \omega_c t + \phi_\Delta x(t)$$

donde ϕ_Δ es una constante positiva que representa la sensibilidad de fase del modulador en radianes/voltio, si x(t) es un voltaje. Si $|x(t)| \leq 1$, ϕ_Δ será la máxima desviación de fase.

La forma de la señal modulada es

$$s(t) = A_c \cos [\omega_c t + \phi_\Delta x(t)]$$

y la pulsación instantánea

$$\omega_i(t) = \omega_c + \phi_\Delta \frac{dx(t)}{dt} \qquad \phi_\Delta \leq \pi$$

VIII.2.2.- MODULACION DE FRECUENCIA

En este caso es la frecuencia instantánea (equivalentemente la pulsación) la que varía linealmente con el mensaje

$$f_i(t) = f_c + f_\Delta x(t)$$

siendo f_Δ una constante positiva que, de manera análoga al caso anterior, representa la sensibilidad en frecuencia del modulador en Hertz/Volt.

Si $|x(t)| \leq 1$, f_Δ es la máxima desviación de frecuencia
f_c es la frecuencia portadora.

La forma de onda de la señal modulada será

$$s(t) = A_c \cos\left[\omega_c t + \omega_\Delta \int_{-\infty}^{t} x(\tau)\, d\tau\right]$$

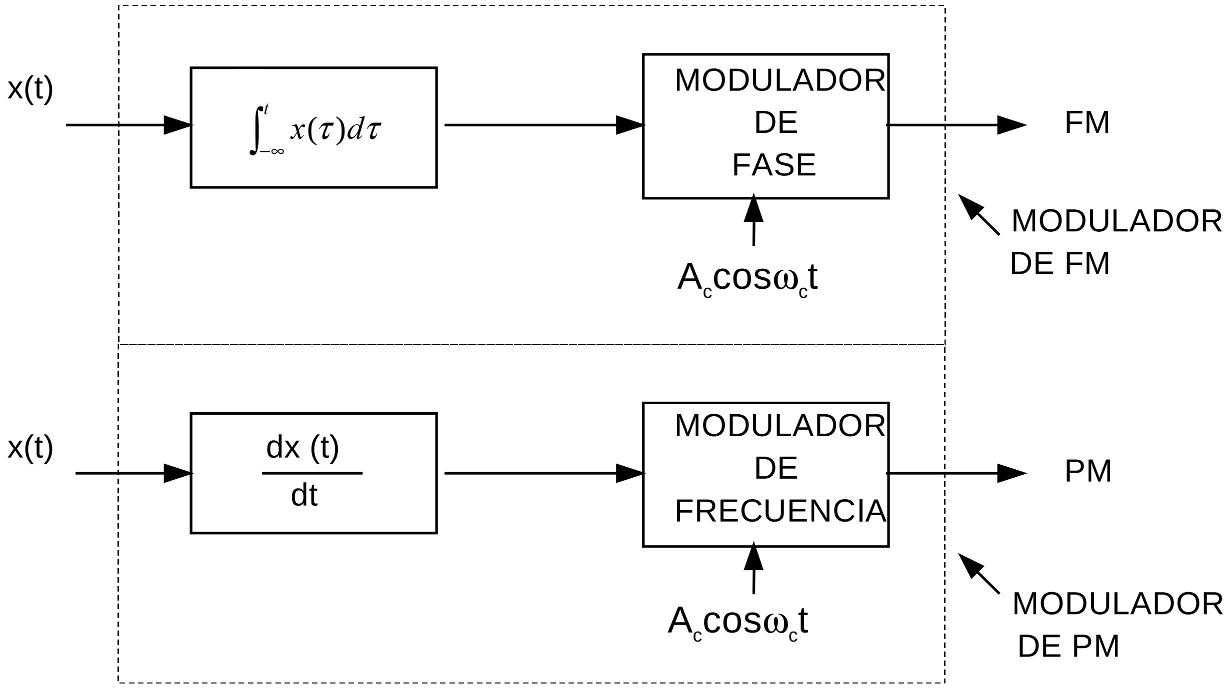
con $\omega_\Delta = 2\pi f_\Delta$

El límite inferior de la integral podría ser cualquier otro ya que representa un término de fase constante. En FM se supone que el mensaje no tiene componente contínua, esto es, $\overline{x(t)} = 0$, de lo contrario la integral divergería para $t \to \infty$. Físicamente, un término de contínua produciría un desplazamiento de la frecuencia portadora. En la práctica, la componente continua del mensaje se bloquea en los circuitos del modulador.

VIII.2.3.- RELACION ENTRE MODULACION DE FASE Y MODULACION DE FRECUENCIA

Comparando las expresiones de las señales moduladas de PM y FM puede observarse que FM puede considerarse como una modulación de fase en la que la señal moduladora sería la integral del mensaje $\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\, d\tau$.

Análogamente una modulación de fase puede considerarse como una señal FM cuya señal moduladora fuese la derivada del mensaje. Ambas situaciones pueden contemplarse en las figuras siguientes :



VIII.3.- COMPARACION ENTRE MODULACIONES ANGULARES Y LINEALES

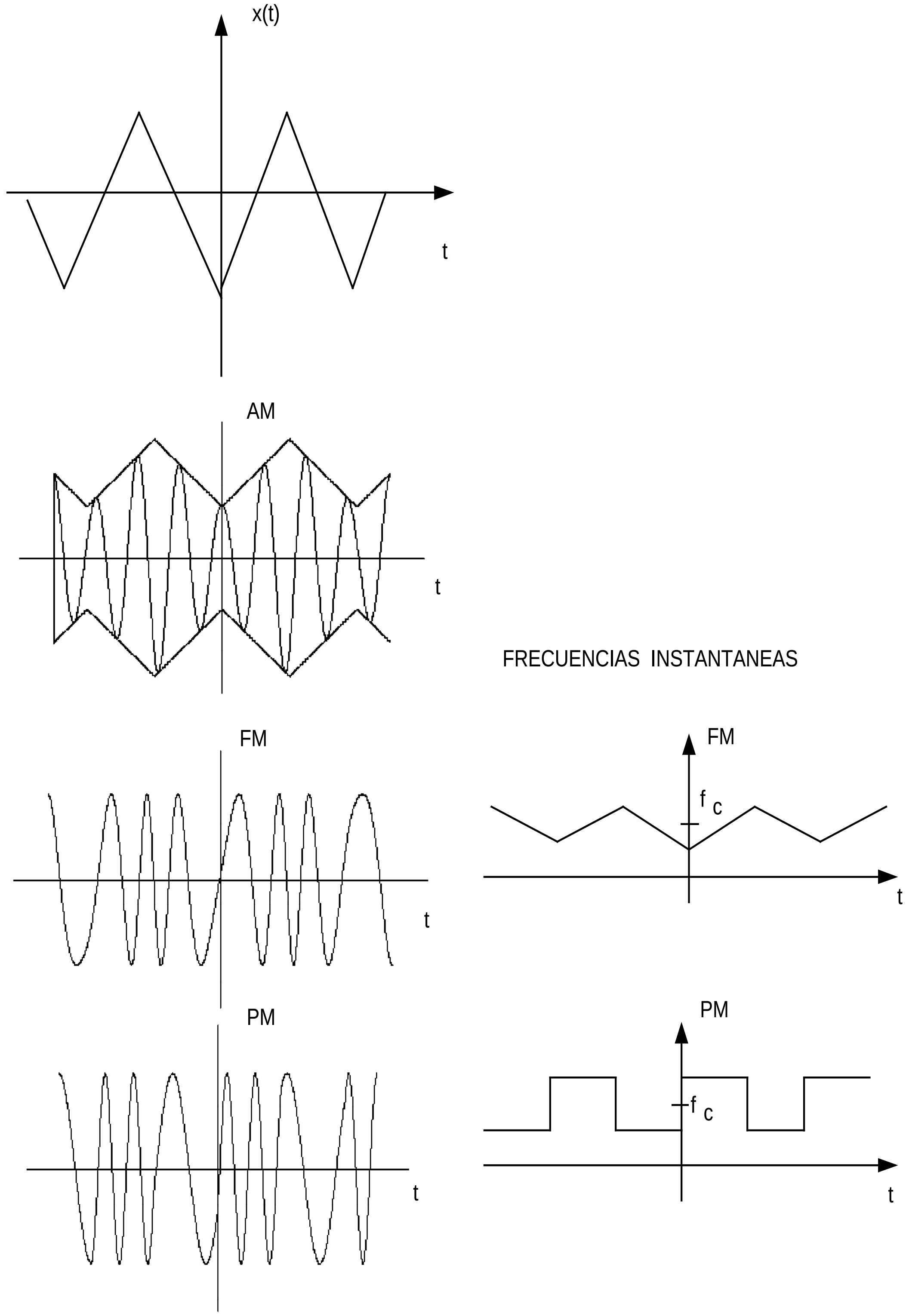
Una diferencia importante entre modulaciones angulares y lineales es que en las primeras la amplitud, y por tanto la envolvente, es constante y no depende del mensaje mientras que en las lineales la envolvente es dependiente del mismo. Equivalentemente la potencia transmitida en las angulares es constante con el mensaje.

$$P_T = \frac{1}{2} A_c^2$$

y en las lineales no.

Otra diferencia importante son los cruces por cero de la señal modulada. Mientras que en las modulaciones lineales son siempre periódicos, en PM o FM ya no tienen esa regularidad en su espaciamiento.

Estas diferencias son ilustradas en las siguientes figuras


x(t)
t
AM
t
FRECUENCIAS INSTANTANEAS
FM
t
FM
f c
t
PM
t
PM
f c
t

VIII.4.- ANALISIS ESPECTRAL DE FM CON UN TONO

A pesar de las similitudes de PM y FM, esta última tiene mejores propiedades en lo que a reducción de ruido se refiere, por lo que será objeto de mayor atención. Por otra parte, muchos de los resultados y conclusiones basados en el estudio de FM son aplicables, con ligeras modificaciones, a la modulación de fase.

Antes de comenzar con el estudio en el dominio de la frecuencia de FM, hay que observar que la frecuencia instantánea no es lo mismo que la frecuencia espectral. La primera es una variable dependiente del tiempo que describe la señal modulada en el dominio temporal mientras que la segunda es la variable independiente en la transformada de Fourier de la señal modulada.

El análisis espectral de FM es, por ser un proceso no lineal, bastante difícil salvo para un reducido número de señales moduladoras. El caso más simple es cuando la señal moduladora es un tono simple.

$$x(t) = A_m \cos\omega_m t$$

En este caso la señal modulada tendrá la expresión

$$s(t) = A_c \cos\left[\omega_c t + \omega_\Delta \int_0^t A_m \cos\omega_m \tau d\tau\right]$$

La frecuencia instantánea es $f_i(t)=f_c+ f_\Delta A_m \cos\omega_m t$, por lo que la máxima desviación de frecuencia es $f_\Delta A_m$.

Llamando

$$\beta = \frac{\omega_\Delta A_m}{\omega_m} = \frac{f_\Delta A_m}{f_m}$$

Siendo β el denominado índice de modulación, la señal modulada puede escribirse

$$s(t) = A_c \cos(\omega_c t + \beta \operatorname{sen}\omega_m t)$$

o bien

$$s(t) = \mathrm{Re}\,[b_s(t)]\; e^{j\omega_c t}$$

donde

$$b_s(t) = A_c\; e^{j\beta \operatorname{sen} \omega_m t}$$

Si bien la señal modulada no es periódica, $b_s(t)$ si lo es y, por tanto, puede desarrollarse en serie de Fourier.

$$b_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\, e^{jn\omega_m t} \qquad \text{periodo } T_m = \frac{2\pi}{\omega_m}$$

Donde los coeficientes son

$$c_n = \frac{1}{T_m} \int_{-T_m/2}^{T_m/2} b_s(t)\, e^{-jn\omega_m t}$$

Sustituyendo $b_s(t)$ y realizando el cambio de variable $\omega_m t = x$ queda la expresión

$$c_n = A_c \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{j(\beta \operatorname{sen} x - nx)} dx \right]$$

El término entre corchetes es una de las representaciones de la n-ésima función de Bessel de argumento β, por lo que

$$b_s(t) = A_c \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\beta)\, e^{jn\omega_m t}$$

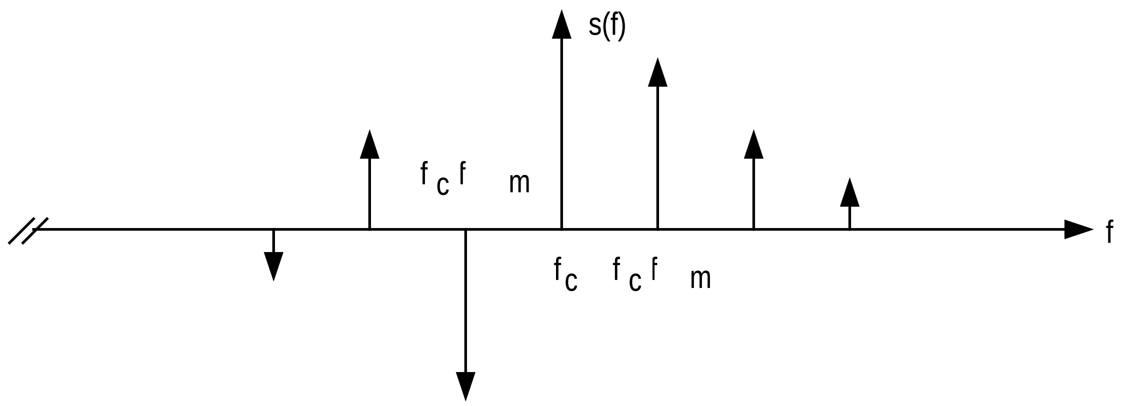
y por tanto la señal modulada

$$s(t) = A_c \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\beta) \cos(\omega_c + n\omega_m)t$$

La transformada de Fourier es

$$S(f) = \frac{A_c}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\beta) \left[\delta(f-f_c-nf_m) + \delta(f+f_c+nf_m)\right]$$

Así pues, el espectro de una señal FM contiene una frecuencia portadora (n=0) y un conjunto infinito de líneas "laterales" dispuestas simétricamente a cada lado de la portadora con separaciones de frecuencias f_m , $2f_m$, $3f_m$ . . .



Las líneas impares inferiores tienen la fase invertida respecto de las superiores por la propiedad de las funciones de Bessel

$$J_{-n}(\beta) = (-1)^n J_n(\beta)$$

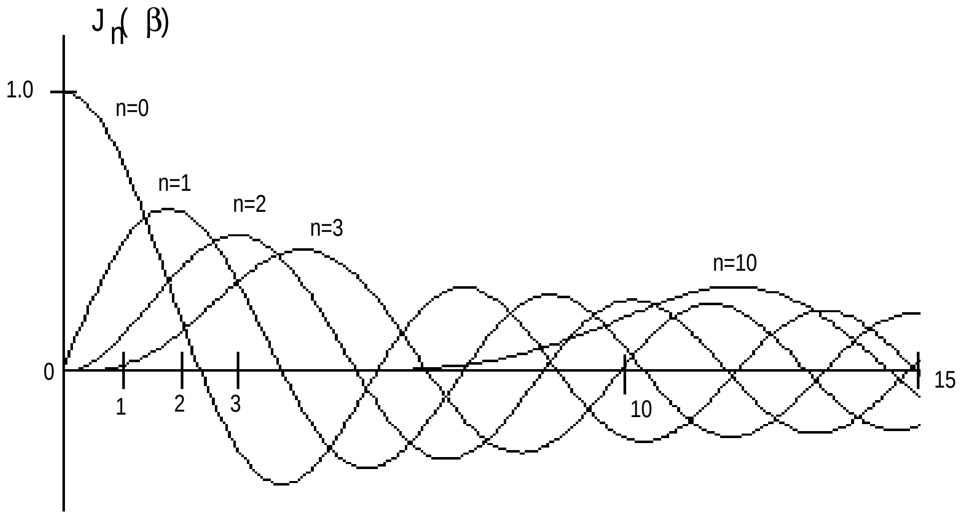
También de la propiedad

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n^2(\beta) = 1$$

Se obtiene de nuevo para la potencia transmitida

$$P_T = \frac{1}{2} A_c^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n^2(\beta) = \frac{1}{2} A_c^2$$

En la figura están representadas algunas funciones de Bessel en función del índice de modulación.



Para valores pequeños del índice de modulación ($\beta << 1$) las funciones de Bessel se comportan como

$$J_o(\beta) \approx 1$$

$$J_n(\beta) \approx \frac{1}{\Gamma(n+1)} \left(\frac{\beta}{2}\right)^n \qquad \beta << 1$$

De todo ello pueden inferirse las siguientes propiedades

- La amplitud relativa de la portadora $J_o(\beta)$ varía con el índice de modulación y por tanto depende del mensaje. A diferencia de AM, la portadora de FM lleva información y no puede ser suprimida

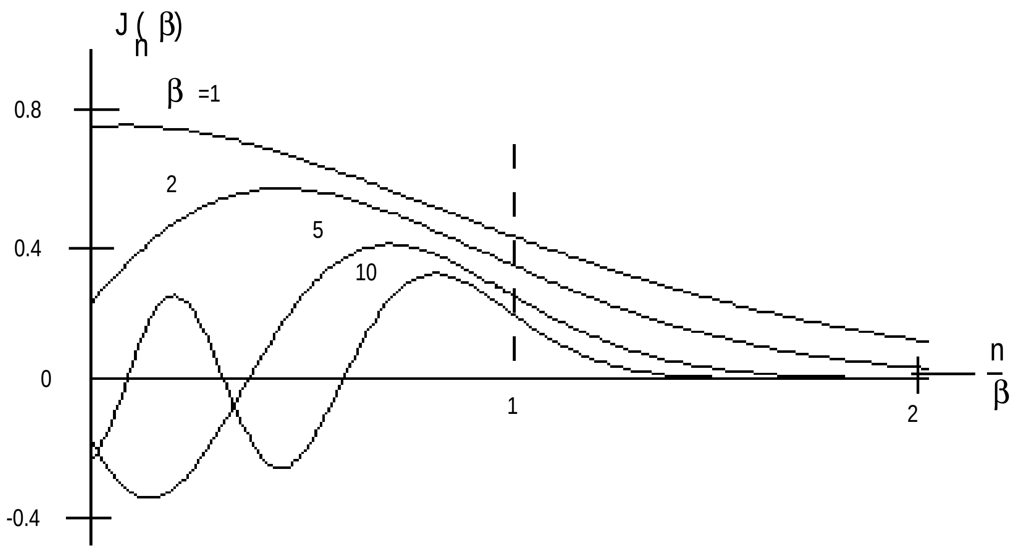
- El número de líneas con amplitud no despreciable es también función del índice de modulación. Si $\beta << 1$, sólo serán significativas la J_o y $J_{\pm 1}$ y el ancho de banda sería como en AM. Por el contrario si $\beta >> 1$, habrá muchas líneas, por lo que el espectro será bien diferente que en AM.

VIII.4.1.- ANCHO DE BANDA DE FM (MODULADORA : TONO SIMPLE)

En teoría, una señal FM tiene un número infinito de rayas espectrales, por lo que el ancho de banda requerido para transmitir dicha señal será infinito. En la práctica, la amplitud de las líneas laterales disminuye a medida que se alejan de la portadora y el ancho de banda puede limitarse a una extensión finita, reteniendo solamente aquellas componentes espectrales con amplitudes significativas y omitiendo el resto.

La porción de espectro significativa dependerá de la cantidad de distorsión tolerada en una aplicación específica.

Una valoración aproximada del ancho de banda puede determinarse observando la siguiente figura



De ella se deduce que las amplitudes de las líneas oscilan si $n/\beta < 1$ y decrecen monotónicamente para $n/\beta > 1$. Si β es suficientemente grande, la amplitud decrece rápidamente y puede decirse que para β grande el número de líneas significativas es del orden de β y el ancho de banda será, por tanto, del orden de $2Mf_m \approx 2\beta f_m = 2f_\Delta A_m$, es decir el doble de la máxima desviación de frecuencia, conclusión que está bastante de acuerdo con el razonamiento intuitivo.

Para β pequeño ($\beta << 1$) la única línea significativa es la portadora, pero deben tomarse al menos el primer par de líneas laterales ($n = \pm 1$), de lo contrario no tendríamos modulación de frecuencia en absoluto.

Todas estas cuestiones conducen a la sencilla regla de Carson para la determinación del ancho de banda efectivo de tranmisión de una señal FM con un solo tono

$$B_T \approx 2f_m + 2\beta f_m = 2f_m + 2f_\Delta A_m$$

Una valoración más precisa del ancho de banda puede obtenerse definiendo una cantidad ε y reteniendo sólo aquellas líneas que verifican que

$$|J_n(\beta)| > \varepsilon$$

Una elección conveniente para ε puede estar comprendida en el margen

$$0.01 < \varepsilon < 0.1$$

Lo que significaría que para el caso de $\varepsilon = 0.01$, se retendrían las M primeras líneas, más allá de las cuales, la amplitud es inferior al 1% de la portadora sin modular. El número de líneas será función del índice de modulación y del ε seleccionado (distorsión tolerada). El ancho de banda será :

$$B_T = 2f_m\, M(\beta) \qquad M \geq 1$$

La condición $M \geq 1$ viene del hecho de que B_T no puede ser inferior a $2f_m$.

En la tabla siguiente pueden observarse los valores de M en función de β para $\varepsilon = 0.01$

β	M
0.1	1
0.3	2
0.5	2
1.0	3
2.0	4

5.0	8
10.0	14
20.0	25
30.0	35

Algunos estudios experimentales demuestran que $\varepsilon = 0.01$ es bastante conservador y que $\varepsilon = 0.1$ produce una distorsión apreciable. Un valor comprendido entre ambos parece más adecuado.

En ausencia de tablas o curvas apropiadas puede utilizarse la siguiente aproximación para el número de líneas

$$M \approx \beta + \alpha$$

Estando α comprendido entre 1 y 2. Con $\alpha = 1$ se tiene la regla de Carson

El ancho de banda es

$$B_T = 2Mf_m = 2f_m(\beta+\alpha) = 2f_\Delta A_m + 2\alpha f_m$$

VIII.5.- ANALISIS ESPECTRAL DE FM CON DOS TONOS

Si la señal moduladora está compuesta por dos tonos

$$x(t) = A_1 \cos\omega_1 t + A_2 \cos\omega_2 t$$

La señal modulada puede escribirse como

$$s(t) = A_c \cos(\omega_c t + \beta_1 \operatorname{sen}\omega_1 t + \beta_2 \operatorname{sen}\omega_2 t)$$

con

$$\beta_i = \frac{f_\Delta A_i}{f_i} \qquad i = 1, 2$$

La señal a desarrollar es, en este caso

$$b_s(t) = A_c \; e^{j\beta_1 \mathrm{sen}\omega_1 t} \, e^{j\beta_2 \mathrm{sen}\omega_2 t}$$

Desarrollando por separado cada una de las exponenciales en serie de fourier se obtendrá la siguiente señal modulada

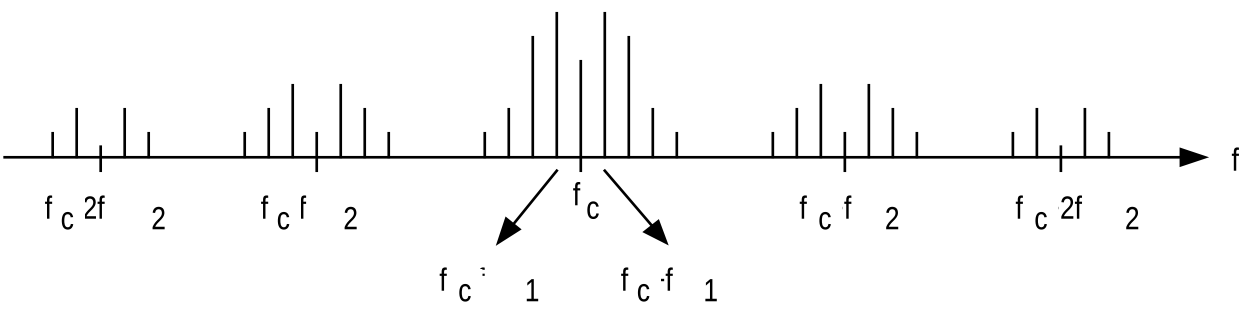
$$s(t) = A_c \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_n(\beta_1)\; J_m(\beta_2)\; \cos(\omega_c + n\omega_1 + m\omega_2)t$$

El espectro estará formado por cuatro tipos de líneas espectrales

- Una línea portadora de amplitud $A_c \; J_o(\beta_1) \, J_o(\beta_2)$
- Líneas laterales de frecuencias $f_c \pm nf_1$ debidas a un tono
- Líneas laterales de frecuencias $f_c \pm mf_2$ debidas al otro tono
- Líneas laterales de frecuencias $f_c \pm nf_1 \pm mf_2$ es decir, un batido de ambos tonos y su correspondientes armónicos

El último tipo no tiene su equivalente en modulaciones lineales, donde las líneas laterales se superponen de manera simple. Esta es la consecuencia de que FM no es un proceso lineal y no se puede aplicar superposición.

En la figura se muestra el espectro para $f_1 \ll f_2$ y $\beta_1 > \beta_2$ donde las inversiones de fase de las líneas correspondientes se han omitido por claridad



Obsérvese que en este caso particular las líneas $f_c \pm mf_2$ parecen otras portadoras moduladas en FM con el tono de frecuencia f_1 y que el ancho de banda de la señal modulada es, básicamente, el que se tendría con sólo el tono dominante f_2 .

VIII.6.- ANCHO DE BANDA DE UNA SEÑAL FM CON UNA MODULADORA GENERAL PASO BAJO

Aunque no puede aplicarse superposición de tonos en FM para calcular el ancho de banda, se ha visto en el apartado anterior que el tono dominante es el que prácticamente determina el ancho de banda. Si el ancho de banda de la señal moduladora x(t) es B y si $|x(t)| \leq 1$, el caso peor sería el equivalente a un tono de frecuencia B y amplitud unidad. En este caso la desviación de frecuencia máxima será f_Δ y $\beta = f_\Delta /B$.

Llamando a

$$\Delta = \frac{f_\Delta}{B} = \beta \qquad \text{relación de desviación}$$

y aplicando la fórmula de un sólo tono

$$B_T = 2B(\beta+\alpha) = 2f_\Delta + 2\alpha B$$

$$B_T = 2(\Delta+\alpha)\, B$$

En FM comercial

$f_\Delta = 75$kHz y B = 15kHz, de forma que la relación de desviación es

$$\Delta = 5$$

Con $\alpha = 1$ (regla de Carson) se obtiene un ancho de banda

$$B_T = 180 \text{ kHz}$$

con $\alpha = 2$ el ancho de banda es

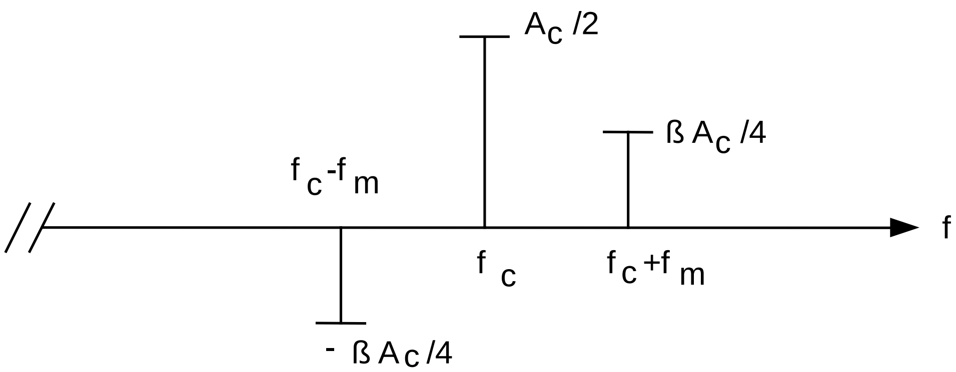
$$B_T = 210 \text{ kHz}$$

VIII.7.- MODULACION DE FRECUENCIA DE BANDA ESTRECHA

Si el índice de modulación β es pequeño ($\beta \ll 1$), sólo las líneas con n=0,±1 serán significativas. Aproximando las respectivas funciones de Bessel como se ha visto anteriormente, se tendrá, para la señal modulada

$$s(t) = A_c \cos\omega_c t + \frac{1}{2} \beta A_c [\cos(\omega_c + \omega_m)t - \cos(\omega_c - \omega_m)t]$$

cuyo espectro es el de la figura



Comparando con la modulación de amplitud (AM) con un sólo tono

$$s(t) = A_c \cos\omega_c t + \frac{1}{2} \mu A_c [\cos(\omega_c + \omega_m)t + \cos(\omega_c - \omega_m t)]$$

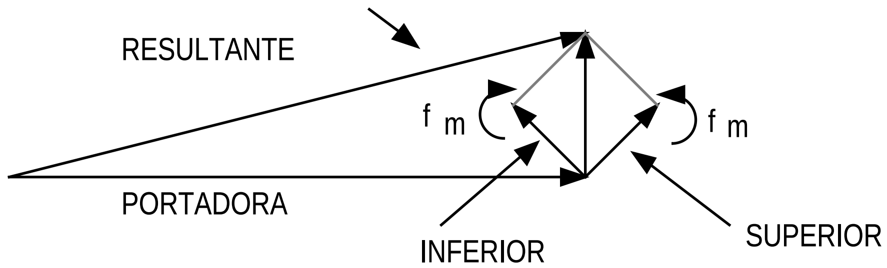
$$\mu = m A_m$$

Se ve que la diferencia básica es el signo de la línea lateral inferior, que la FM invierte. El ancho de banda de transmisión es el mismo.

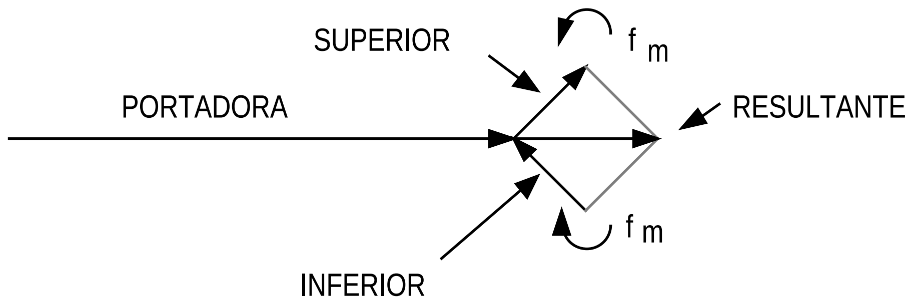
$B_T = 2f_m$

Representando ambas señales (FM y AM) mediante un diagrama fasorial, con la portadora como fasor de referencia, se observa que las líneas laterales de FM se combinan para dar un fasor que está en cuadratura con la portadora y por tanto el fasor resultante no está en fase con la portadora. En AM, el fasor resultante si está en fase con la portadora (ver figura).

-FM



-AM



En general, con una señal moduladora cualquiera, la señal modulada FM tiene la forma

$$s(t) = A_c \cos[\omega_c t + \phi(t)]$$

con

$$\phi(t) = 2\pi f_\Delta \int_{-\infty}^{t} x(t)dt$$

Si la desviación de frecuencia es suficientemente pequeña de forma que

$$|\phi(t)| << 1$$

La señal modulada puede escribirse como

$$s(t) \approx A_c \cos\omega_c t - A_c \phi(t) \operatorname{sen}\omega_c t$$

Suponiendo que el mensaje x(t) no tiene componente contínua, la transformada de Fourier de $\phi(t)$ será

$$F[\phi(t)] = 2\pi f_\Delta \frac{X(\omega)}{j\omega}$$

y la transformada de la señal modulada

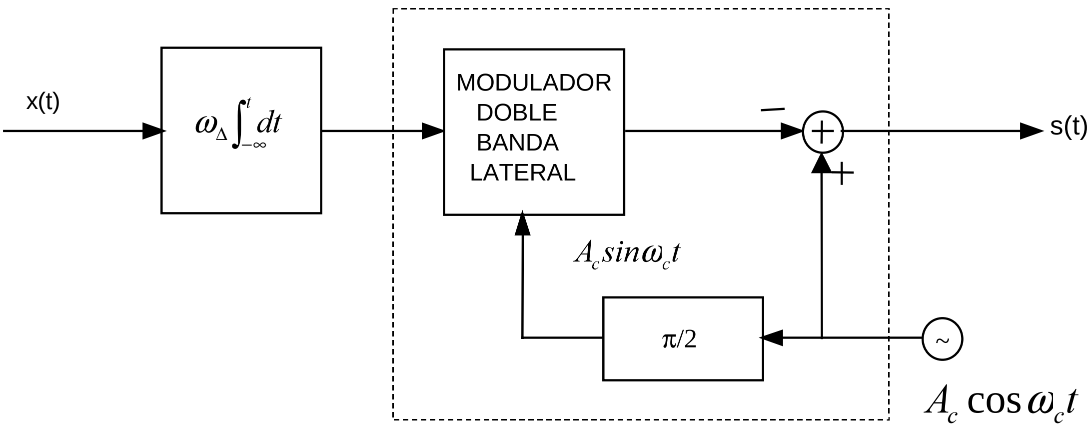
$$S(\omega) = \pi A_c [\delta(\omega-\omega_c) + \delta(\omega + \omega_c)] + \frac{1}{2} A_c \omega_\Delta \left[\frac{X(\omega-\omega_c)}{\omega-\omega_c} - \frac{X(\omega+\omega_c)}{\omega+\omega_c} \right]$$

donde de nuevo se ponen de manifiesto las similitudes y diferencias con AM.

La FM de banda estrecha no presenta ninguna ventaja repsecto de AM y prácticamente no se utiliza, sólo en radioaficionados y en algunos sistemas de comunicaciones múltiples.

VIII.8.- GENERACION DE FM DE BANDA ESTRECHA

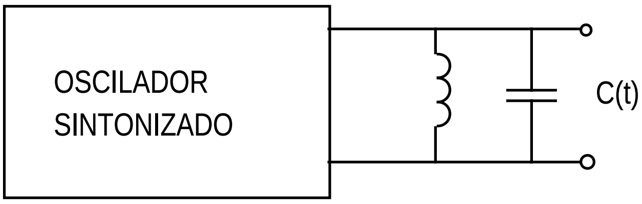
Un esquema de modulación de FM de banda estrecha, sugerido por las expresiones anteriores, es el siguiente



MODULADOR DE FASE DE BANDA ESTRETCHA

VIII.9.- MODULACION DIRECTA DE FM DE BANDA ANCHA

La generación de FM directa puede realizarse mediante un oscilador controlado por tensión, cuya frecuencia de oscilación varíe de acuerdo con el mensaje:



El condensador, cuya capacidad varia con la tensión aplicada, se denomina varactor o varicap y puede obtenerse, por ejemplo, con un diodo P-N polarizado en inverso.

La frecuencia instantánea del oscilador puede escribirse

$$f_i(t) = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC(t)}}$$

La capacidad variable puede expresarse como

$$C(t) = C_o - \Delta C\, x(t)$$

Si suponemos que

$$\left|\frac{\Delta C}{C_o}\, x(t)\right| << 1$$

La frecuencia instantánea será

$$f_i(t) = f_c\left[1 - \frac{\Delta C}{C_o}\, x(t)\right]^{-1/2} \cong f_c\left[1 + \frac{\Delta C}{2C_o}\, x(t)\right]$$

siendo

$$f_c = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC_o}}$$

Definiendo

$$\frac{f_\Delta}{f_c} = \frac{\Delta C}{2C_o}$$

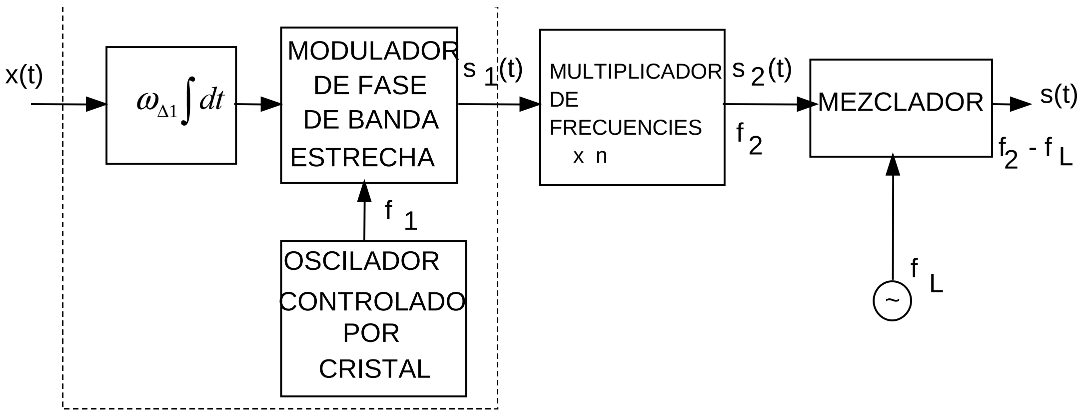
Se obtiene finalmente para la frecuencia instantánea

$$f_i(t) = f_c + f_\Delta \; x(t)$$

El problema fundamental de estos esquemas es la estabilidad del oscilador por lo que en general se recurre a métodos indirectos de modulación.

VIII.10.- MODULACION INDIRECTA DE FM

El diagrama de bloques de un sistema indirecto de modulación se presenta en la siguiente figura



MODULADOR DE FM DE BANDA ESTRECHA

A la salida del modulador de FM de banda estrecha se tendrá

$$s_1(t) = A_1 \cos\left[\omega_1 t + 2\pi f_{\Delta 1} \int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau\right]$$

A la salida del multiplicador de frecuencias

$$s_2(t) = A_2 \cos\left[\omega_2 t + 2\pi f_{\Delta} \int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau\right]$$

con $\omega_2 = n\omega_1$ $\quad f_\Delta = nf_{\Delta 1}$

Finalmente, a la salida del mezclador se tendrá la señal modulada

$$s(t) = A_c \cos\left[\omega_c t + 2\pi f_\Delta \int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau\right]$$

con $f_c = f_2 - f_L$

Ejemplo :

$f_1 = 200$ kHz (buena estabilidad)

B = 15 kHz (señal de música)

$f_{\Delta 1} = 25$Hz (FM de banda estrecha)

La relación de desviación es

$$\Delta_1 = \frac{f_{\Delta 1}}{B} = \frac{25}{15}\, 10^{-3}$$

Si se quiere una relación final de 5 como en FM comercial ($\Delta = n\Delta_1$)

n = 3000

De esta forma, la frecuencia a la salida del multiplicador será

$f_2 = nf_1 = 600$ MHz

Por tanto si se toma una frecuencia f_L de

$500 < f_L < 512$ MHz

La frecuencia de la señal modulada será

$88 < f_c < 100$ MHz

VIII.11.- DEMODULADORES DE FM : DISCRIMINADOR DE FRECUENCIAS

Puesto que la señal FM tiene la forma

$$s(t) = A_c \cos \theta_c(t)$$

donde

$$\theta_c(t) = \omega_c t + 2\pi f_\Delta \int_{-\infty}^{t} x(\tau)\, d\tau$$

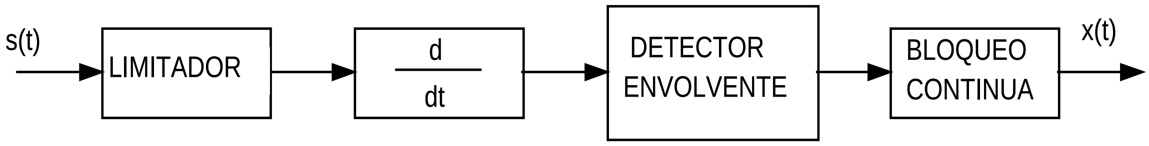
Cualquier dispositivo que realice la derivada

$$\frac{ds(t)}{dt} = -A_c \frac{d\theta_c(t)}{dt} \operatorname{sen}\theta_c(t)$$

Obtendría una doble modulación AM y FM. Mediante una detección de envolvente posterior se obtendría la señal demodulada

$$\nu(t) = A_c \left[2\pi f_c + 2\pi f_\Delta x(t)\right]$$

Eliminando la componente continua se tendría finalmente el mensaje. El diagrama de bloques está representado en la siguiente figura

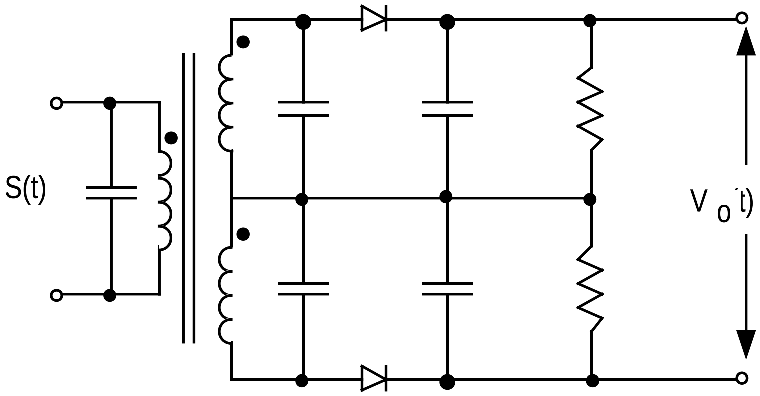


El objeto del limitador es eliminar la modulación de amplitud espúrea introducida por el canal.

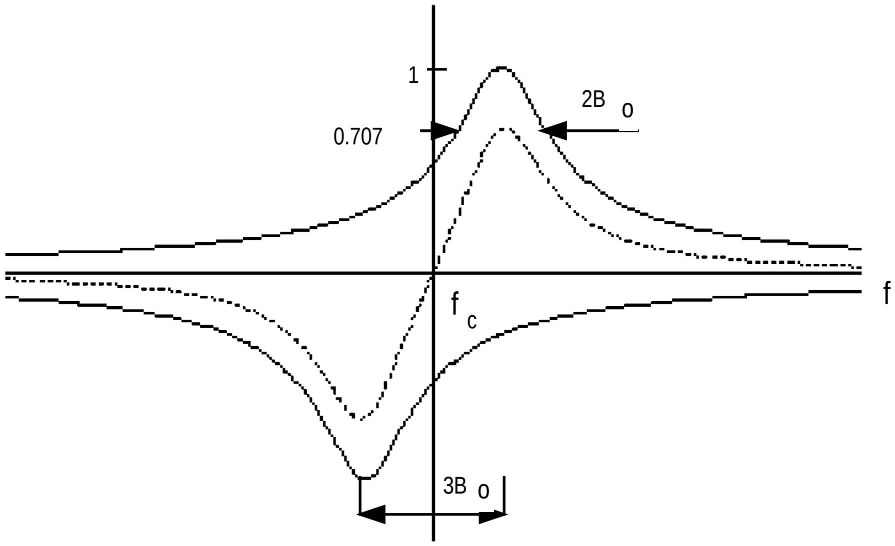
El problema fundamental del esquema anterior es la realización del dispositivo que realiza la derivada o lo que es lo mismo, un dispositivo con una respuesta frecuencial de la forma

$$H(\omega) = j\omega$$

No obstante, basta que la respuesta sea de esa forma sólo en el ancho de banda de transmisión. Una manera aproximada de obtener esta función es mediante el siguiente esquema, que incluye también el detector de envolvente.



En la figura siguiente pueden verse las respuestas frecuenciales de los filtros superior e inferior y la respuesta total (línea de puntos).



La linealidad de la porción útil de la respuesta total, centrada en f_c , esta determinada por la separación de las frecuencias resonantes de ambos filtros. Como expresado en la figura, una separación de frecuencias de $3B_o$, con $2B_o$ el ancho de banda a 3dB de cada filtro, proporciona resultados satisfactorios. En este caso se tendría que $B_T \cong 3B_o$. No obstante, siempre habrá distorsión de frecuencias a la salida del discriminador porque la señal FM de entrada contiene frecuencias fuera del rango $f_c - B_T/2 < f < f_c + B_T/2$ y porque los filtros sintonizados y los detectores de envolvente no son ideales.

VIII.12.- DETECCION DE FM USANDO UNA LINEA DE RETARDO

La derivación

$$\frac{ds(t)}{dt} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} [s(t) - s(t-\varepsilon)]$$

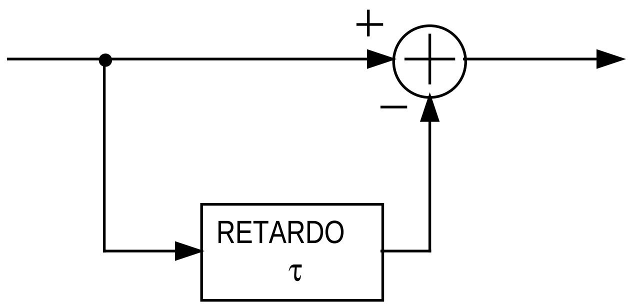
puede ser aproximada por la siguiente expresión

$$\frac{ds(t)}{dt} \cong \frac{1}{\tau} [s(t) - s(t-\tau)]$$

siempre que se cumpla que

$$\tau << (1/f_c)$$

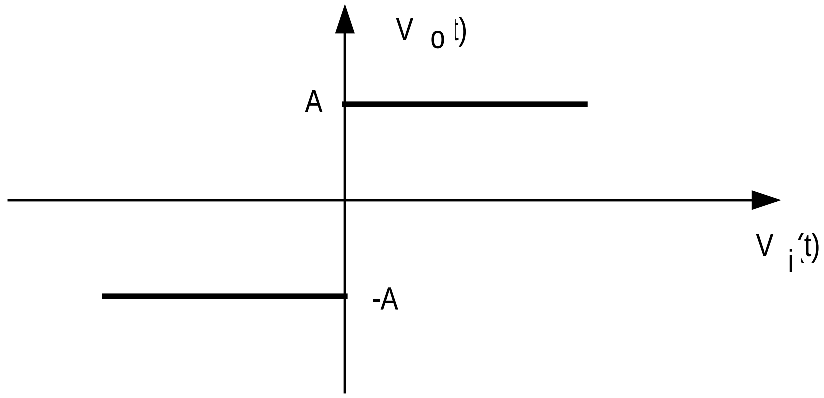
La realización de este esquema es bastante sencilla mediante una línea de retardo



Los detectores de relación y el Foster-Seely están basados en esta idea, aunque el retardo temporal no lo obtienen con línea de retardo.

VIII.13.- LIMITADOR

Un limitador es un dispositivo que elimina las variaciones de amplitud espúrias en una señal modulada angularmente sin destruir esta última. En la figura puede verse la características entrada-salida de un limitador ideal.



En forma matemática

$$\nu_o(t) = A \text{ sign } [v_i(t)]$$

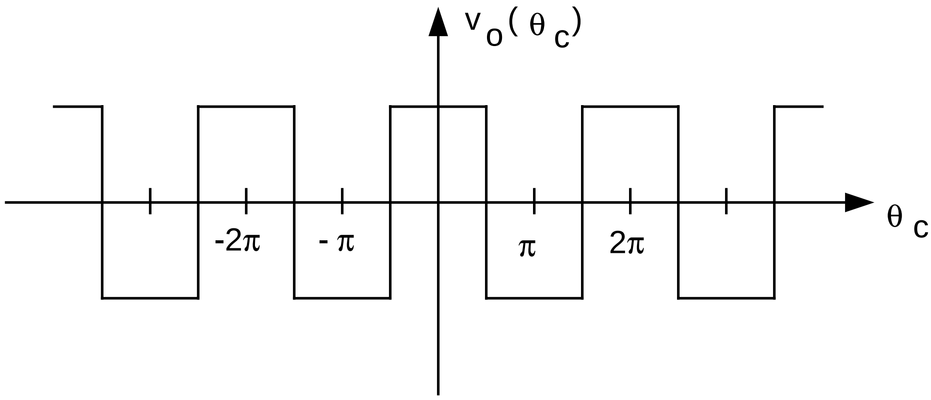
Aunque la señal de entrada

$$s(t) + v_i(t) = A_c(t) \cos \theta_c(t)$$

No es periódica, si la modulación de amplitud es pequeña, de forma que $A_c(t) > 0, \forall\, t$, la salida

$$\nu_o(t) = A \text{ sign } [\cos\theta_c(t)]$$

Puede considerarse como una señal periódica, en la variable θ_c con periodo 2π



cuyo desarrollo en serie de Fourier es

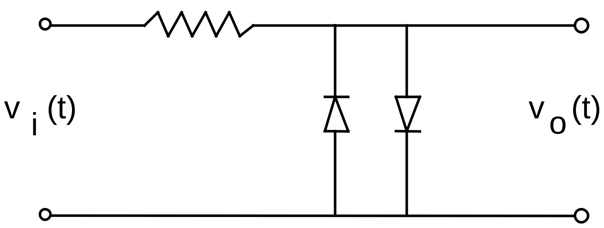
$$v_o(t) = \frac{4A}{\pi}\left[\cos\theta_c(t) - \frac{1}{3}\cos 3\theta_c(t) + \frac{1}{5}\cos 5\theta_c(t) \ ...\right]$$

Un filtro paso banda, centrado en f_c frecuencia portadora, seleccionaría el primer término, esto es,

$$v(t) = \frac{4A}{\pi} \ \cos\left[\omega_c t + \phi(t)\right]$$

Quedando una señal modulada angularmente.

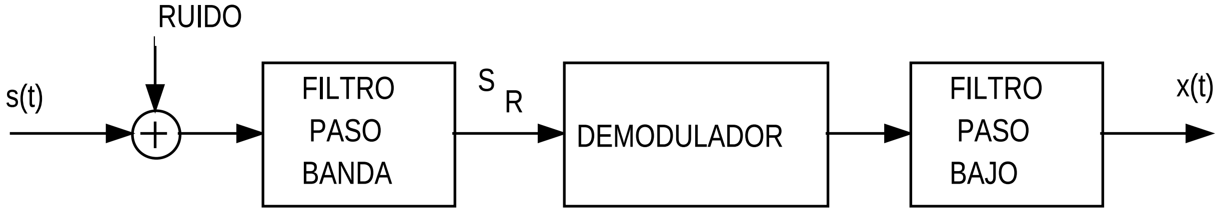
Una realización práctica simple del limitador es la de la figura.



Cuando el voltaje de entrada supera el umbral de conducción de uno cualquiera de la diodos (dependiendo de la polaridad), este conducirá fuertemente y su voltaje se mantendrá prácticamente constante, recortando por tanto las variaciones de amplitud de la entrada.

VIII.14.- RUIDO EN MODULACIONES ANGULARES

El diagrama de bloques del receptor de FM y PM es el mostrado en la figura



El filtro paso banda incluye también el limitador. La potencia de señal de entrada al demodulador será

$$S_R = A_c^2 /2$$

y la potencia de ruido blanco

$$N_R = \eta B_T$$

de forma que la relación señal/ruido paso banda es

$$\left(\frac{S}{N}\right)_R = \frac{A_c^2}{2\eta B_T}$$

siendo B_T el ancho de banda de la señal modulada.

El ruido paso banda puede ser expresado como

$$n_R(t) = i_n(t) \cos\omega_c t - q_n(t) \operatorname{sen}\omega_c t$$

o en forma de módulo y fase

$$n_R(t) = R_n(t) \cos [\omega_c t + \phi_n(t)]$$

donde

$$R_n(t) = \sqrt{i_n^2(t) + q_n^2(t)}$$

$$\phi_n(t) = \operatorname{arctg} \frac{q_n(t)}{i_n(t)}$$

La señal modulada tiene la forma

$$s(t) = A_c \cos [\omega_c t + \phi(t)]$$

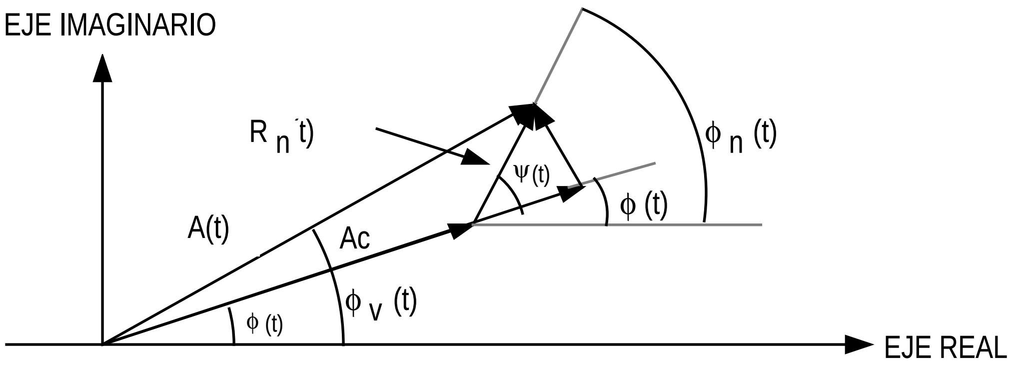
La señal de entrada al demodulador será

$$\nu_i(t) = s(t) + n_R(t) = A(t) \cos [\omega_c t + \phi_v(t)]$$

siendo (Ver figuras)

$$A(t) = \left\{ [A_c + R_n(t) \cos\psi(t)]^2 + R_n^2(t) \operatorname{sen}^2_\psi(t) \right\}^{1/2}$$

$$\phi_v(t) = \phi(t) + \operatorname{arctg} \frac{R_n(t) \operatorname{sen}\psi(t)}{A_c + R_n(t) \cos\psi(t)} \quad \psi(t) = \phi_n(t) - \phi(t)$$



La fase de referencia es ω_c t.

La expresión complicada de la señal de entrada al modulador puede simplificarse si se supone que la relación señal/ruido paso banda es grande

$$(S/N)_R \gg 1 \qquad A_c \gg R_n(t) \;\; \forall\, t$$

En este caso

$$A(t) \cong A_c$$

$$\phi_v(t) \cong \phi(t) + \frac{R_n(t)}{A_c} \operatorname{sen}\psi(t)$$

Donde el arco tangente se ha aproximado por el argumento.

A la salida del demodulador, supuesto ideal, se tendrá

- PM

$$\nu_o(t) = \phi_v(t) = \phi_\Delta\ x(t) + \frac{R_n(t)}{A_c}\ \text{sen}\ \psi(t)$$

- FM

$$\nu_o(t) = \frac{1}{2\pi}\frac{d\phi_v(t)}{dt} = f_\Delta\ x(t) + \frac{1}{2\pi A_c}\frac{d}{dt}[R_n(t)\ \text{sen}\psi(t)]$$

El ruido es aditivo en ambos casos, pero dependiente de la señal modulada a través de $\psi(t) = \phi_n(t) - \phi(t)$.

El análisis del ruido puede simplificarse extraordinariamente si suprimimos la señal moduladora en la expresión anterior. En este caso $\phi(t)=0$ y por tanto $\psi(t) = \phi_n(t)$. El efecto de $\phi(t)$ (señal moduladora) sobre el ruido sería el de producir componentes de frecuencia f>B a la salida del demodulador que serían eliminadas por el filtro paso bajo. Por esta razón se puede escribir que

$$R_n(t)\ \text{sen}\Psi(t) \rightarrow R_n(t)\ \text{sen}\phi_n(t) = q_n(t)$$

Las señales de salida pueden escribirse como

- PM

$$\nu_o(t) = \phi_\Delta\, x(t) + \frac{q_n(t)}{A_c}$$

- F M

$$\nu_o(t) = f_\Delta\ x(t) + \frac{1}{2\pi A_c}\frac{dq_n(t)}{dt}$$

La potencia de señal a la salida del filtro paso bajo será

- PM

$$S_D = \phi_\Delta^2 \, \overline{x^2(t)} = \phi_\Delta^2 \, P_x$$

- F M

$$S_D = f_\Delta^2 \, \overline{x^2(t)} = f_\Delta^2 \, P_x$$

Los espectros de potencia del ruido a la entrada del filtro paso bajo serán

- PM

$$S_{n_o n_o}(\omega) = \frac{1}{A_c^2} S_{q_n q_n}(\omega) \qquad |\omega| \le \pi B_T$$

- F M

$$S_{n_o n_o}(\omega) = \frac{1}{4\pi^2 A_c^2} \omega^2 S_{q_n q_n}(\omega) \qquad |\omega| \le \pi B_T$$

Puesto que

$$S_{q_n q_n}(f) = \eta \qquad |f| \le B_T/2$$

$$A_c^2 = 2S_R$$

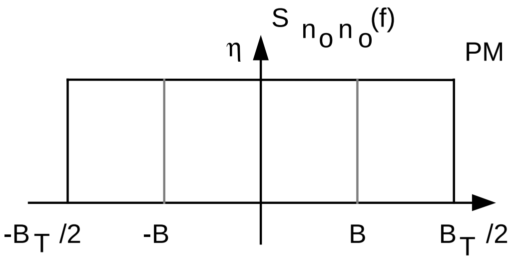
se tendrá finalmente que

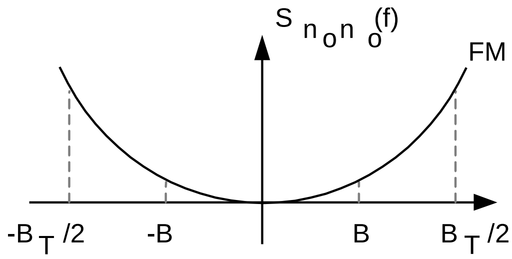
- PM

$$S_{n_o n_o}(f) = \frac{\eta}{2S_R} \qquad |f| \le B_T/2$$

- F M

$$S_{n_o n_o}(f) = \frac{\eta f^2}{2S_R} \qquad |f| \le B_T/2$$





A la salida del filtro paso bajo se tendrá una potencia de ruido

- PM

$$P_{n_o} = \int_{-B}^{B} S_{n_o n_o}(f)\, df = \frac{\eta B}{S_R} = N_D$$

- F M

$$P_n = \int_{-B}^{B} \frac{\eta f^2}{2S_R}\, df = \frac{\eta B^3}{3S_R} = N_D$$

y las relaciones señal/ruido

- PM

$$(S/N)_D = \frac{\phi_\Delta^2 P_X S_R}{\eta B}$$

- F M

$$(S/N)_D = \frac{3f_\Delta^2 P_X S_R}{\eta B^3}$$

Teniendo en cuenta que

$$\gamma = \frac{S_R}{\eta B}$$

Es la relación señal/ruido que se tendría en un sistema de modulación banda base con potencia S_R .

- PM

$$(S/N)_D = \phi_\Delta^2 \ P_x \ \gamma$$

- FM

$$(S/N)_D = \frac{3f_\Delta^2 \ P_x}{B^2} \ \gamma$$

Puesto que $|x(t)| \leq 1$ y debido a la restricción de no ambigüedad de fase ($\phi_\Delta \leq \pi$), se tiene para la modulación de fase

PM $\qquad (S/N)_D \leq \pi^2 \ \gamma$

Es decir, la máxima mejora que se puede obtener para PM es del orden de 10dB.

Para FM, teniendo en cuenta que la relación de desviación es

$$\Delta = \frac{f_\Delta}{B}$$

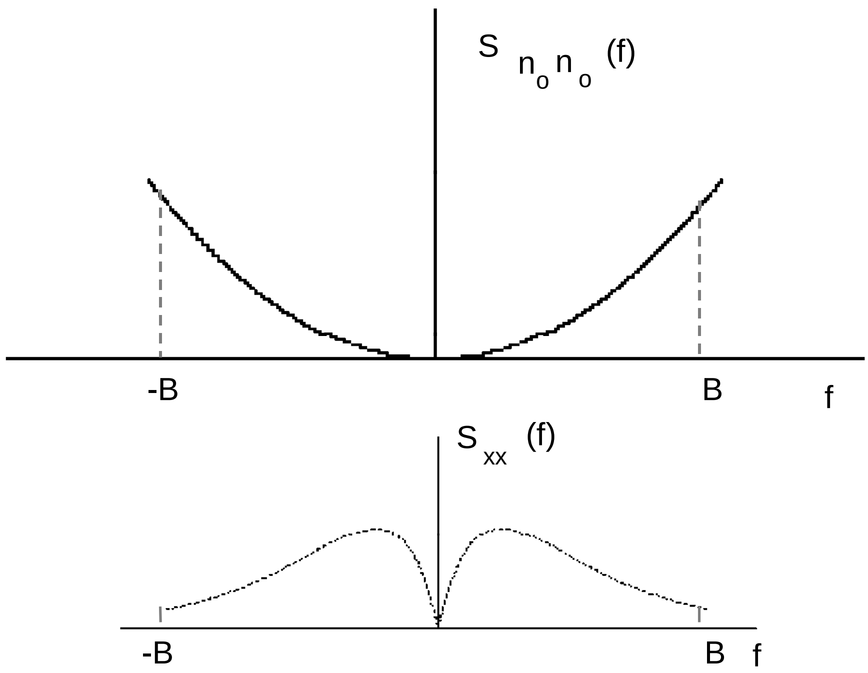
La relación señal/ruido queda

F M $\qquad (S/N)_D = 3\Delta^2 \ P_x \ \gamma$

De donde se concluye que la figura de mérito de FM, respecto de la banda base, aumenta con el cuadrado de la relación de desviación, lo que hace que FM sea muy superior a PM en lo que a reducción de ruido se refiere. En principio, parece que aumentando indefinidamente la relación de desviación, la relación señal/ruido puede hacerse todo lo grande que se quiera, con una potencia de señal transmitida pequeña. Esto solo será verdad si se mantiene la condición $(S/N)_R >> 1$ utilizada en la deducción de $(S/N)_D$. Esta condición es equivalente a $\gamma >> 1$ por lo que la potencia transmitida tendrá un umbral para que la relación cuadrática de $(S/N)_D$ con Δ se verifique.

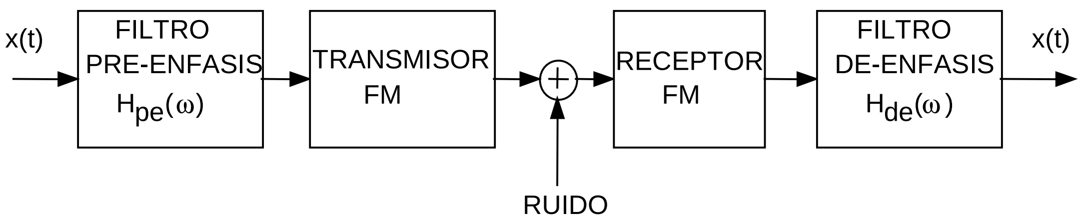
VIII.15.- PRE-ENFASIS Y DE-ENFASIS EN FM

Como se ha visto anteriormente, la densidad espectral de potencia en FM crece con el cuadrado de la frecuencia. En general, las señales de audio tienen un espectro que decae a altas frecuencias.



Con lo que la parte alta del espectro de la señal de audio (15kHz) sufrirá más las consecuencias del ruido. La situación se agrava aún más en la FM estéreo ya que esta se extiende hasta 53kHz.

Una forma de paliar los efectos del ruido a altas frecuencias consiste en introducir dos filtros terminales denominados de pre-énfasis y de-énfasis.



El filtro en el transmisor enfatiza las componentes de alta frecuencia del mensaje antes de ser modulado. En recepción, después de demodular, se realiza la operación inversa, desenfatizando dichas componentes, es decir ecualizando el espectro del mensaje. Esto hace que las componentes de alta frecuencia del ruido sean reducidas mejorando considerablemente la relación señal/ruido del sistema.

Suponiendo el transmisor, el canal y el receptor ideales, los filtros deben cumplir la condición

$$H_{de}(\omega) = \frac{1}{H_{pe}(\omega)} \qquad |\omega| \leq 2\pi B$$

Para que no haya distorsión en el mensaje.

Esto hace que la potencia de señal detectada sea independiente de ambos filtros.

$$S_D = f_\Delta^2 \; P_x$$

La potencia de ruido será

$$P_n = \frac{\eta}{2S_R} \int_{-B}^{B} f^2 \; |H_{de}(f)^2| \, df$$

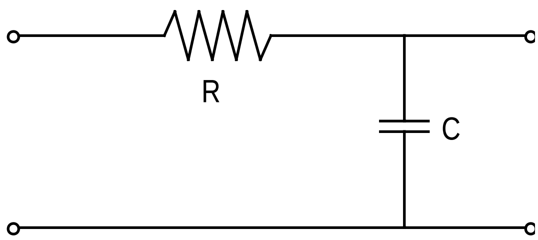
y la relación señal ruido será

$$(S/N)_D = \frac{2f_\Delta^2 \, P_x \, S_R}{\eta \int_{-B}^{B} f^2 \, |H_{de}(f)|^2 \, df} =$$

$$= \frac{2B^3}{3\int_{-B}^{B} f^2 \, |H_{de}(f)|^2 \, df} (S/N)_{Do}$$

Donde $(S/N)_{Do}$ es la relación señal/ruido sin los filtros de pre-énfasis y de-énfasis.

Un filtro de de-énfasis empleado en receptores comerciales es el simple RC paso bajo de la figura



Su respuesta frecuencial es

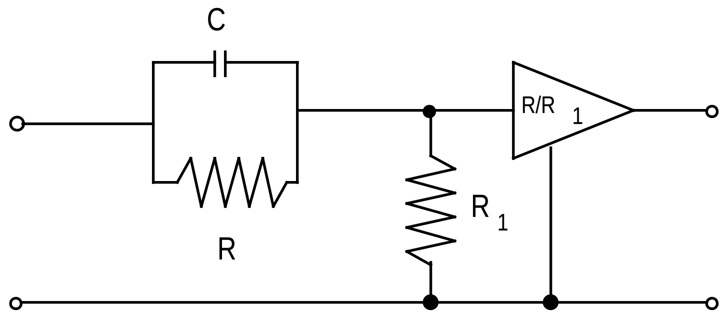
$$H(\omega) = \frac{1}{1+j\omega/\omega_o}$$

con $\omega_o = \frac{1}{RC}$

La respuesta frecuencial del filtro de pre-énfasis será de la forma

$$H_{pe}(\omega) = 1 + j\frac{\omega}{\omega_o}$$

Que es aproximadamente realizada por el siguiente circuito



Si se verifica que $R_1 << R$ y $\omega R_1 C << 1$

$$H_{pe}(\omega) = \frac{R}{R_1} \frac{\frac{R_1}{R} + j\omega R_1 C}{1 + \frac{R_1}{R} + j\omega R_1 C} \cong 1 + j\omega RC$$

El factor de mejora será

$$F = \frac{2B^3}{3 \int_{-B}^{B} \frac{f^2}{1+(f/f_o)^2} df} = \frac{(B/f_o{}^3)}{3\,[B/f_o - \mathrm{arctg}\,(B/f_o)]}$$

En FM comercial se tiene como valor típico f_o = 2.1kHz, B = 15kHz que proporciona un factor de mejora de F = 22 que corresponde a 13dB.